

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Радиофизический факультет**

ОСНОВЫ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Томск 2009

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Фурье преобразование	9
2. Дискретные модели спектров.....	11
2.2. МЕТОД ПРОНИ.....	12
2.3 МЕТОД ПИСАРЕНКО	13
2.4 ДИСКРЕТНОЕ АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.....	14
2.5. МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ	15
3. Оценки непрерывных спектров.....	18
3.1 НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СПМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	18
3.2 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СПМ	19
3.3 КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ.....	20
4. Энтропийные принципы спектрального оценивания	23
4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА В ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛА СПМ	23
4.2 ОЦЕНКИ СПМ, МАКСИМИЗИРУЮЩИЕ ЭНТРОПИЮ	25
4.3 ОЦЕНКА СПМ ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ	26
4.4 ПОЛЮСНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРОВ.....	28
4.5 ЭНТРОПИЯ – ФУНКЦИОНАЛ СПК, КС И СПМ	32
4.6 ОЦЕНКИ СПК, КС И СПМ МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ.....	34
4.7 АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ КС МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ	36
4.8 ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НА ОСНОВ КС МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ	39
ЛИТЕРАТУРА:.....	41

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

АП – автокорреляционная последовательность
АР – авторегрессия
АРСС – авторегрессия со скользящим средним
АСЕ – космический корабль Advanced Composition Explorer
БПФ – быстрое преобразование Фурье
ДАПФ – дискретное ангармоническое преобразование Фурье
ДПФ – дискретное преобразование Фурье
КС – комплексный спектр
МИП – метод инвариантных подпространств
МНК – методом наименьших квадратов
ММЭ – метод максимальной энтропии
НПФ – непрерывное преобразование Фурье
СПМ – спектральная плотность мощности
СПК – спектральная плотность колебаний
СС – скользящее среднее
ФПРК – функция плотности распределения колебаний

ВВЕДЕНИЕ

Спектральное оценивание является одним из распространенных способов обработки рядов данных наблюдений при исследовании явлений различной природы. Принято считать, что основой спектрального оценивания являются преобразования Фурье. Однако, учитывая, что термин «спектр» на латинском означает образ, уместно вспомнить модель движения небесных тел, предложенную Птолемеем в начале новой эры. В системе Птолемея видимые траектории небесных светил представлялись иерархией круговых движений (эпициклы, дифференты). Но это ни что иное, как геометрический способ представления произвольных траекторий рядами из круговых движений. Когда геометрические образы были заменены тригонометрическими функциями, возникли основы спектрального анализа.

Возникновение спектрального анализа начиналось с исследований колебаний струны [1]. Эту задачу решали Галилей, Декарт, Гюйгенс. Однако в их время еще не был разработан математический аппарат для решения подобных задач. Первый шаг на пути создания такого аппарата сделал Тейлор в 1713-1715 гг. – предложив механико-геометрическую формулировку уравнения колебаний струны. Лишь в 1747 г. Даламбер заменил формулировку Тейлора линейным уравнением в частных производных, которое в последствии было названо волновым уравнением. Даламбером было найдено решение волнового уравнения, и был предложен метод разделения переменных для его решения. Существенный вклад в исследование волнового уравнения внес Л. Эйлер. Между ним и Даламбером возникла дискуссия по поводу вида допустимых решений. Если Даламбер требовал от решения гладкости, то Эйлер не исключал разрывных функций.

В 1747-1748 гг. в спор вступил третий участник – Д. Бернулли. Он утверждал, что любую кривую (гладкую и с разрывами) можно представить тригонометрическим рядом и, что этот ряд обладает той же общностью, что и степенной. С возражениями против Бернулли с различных позиций выступили Эйлер и Даламбер. Но уже в 1755 Эйлер предлагает интегральные выражения, позволяющие по начальным условиям вычислять коэффициенты ряда Бернулли. Окончательный успех идея о возможности разложения функций в тригонометрические ряды получила в диссертационной работе Ж.

Фурье «Аналитическая теория тепла» (1722). Буквально через несколько лет исследования Фурье были обобщены в работах Ш. Штурма и Ж. Лиувилля. Ими было показано, что право на жизнь имеют не только степенные и тригонометрические ряды, но и ряды из функций, являющихся решением линейных дифференциальных уравнений – разложение Штурма-Лиувилля. В результате возникла новая математическая дисциплина – спектральный анализ линейных операторов. Во избежание терминологической путаницы исследования, основанные на разложениях по тригонометрическим функциям, называются гармоническим анализом.

Попытки использовать гармонический анализ при исследовании природных явлений начались с середины 19-го столетия. Поскольку вычисление коэффициентов ряда является достаточно трудоемким делом, были разработаны механические гармонические анализаторы [2]. Первый анализатор был создан лордом Кельвином. Гармонический анализатор Майкельсона-Стретона, мог вычислять коэффициенты тригонометрического ряда, содержащего до 80 гармоник, кроме того, позволял производить обратное Фурье преобразование.

Однако проблема практического использования гармонического анализа заключалась не столько в сложности вычисления коэффициентов рядов, сколько в отсутствии обоснованных алгоритмов расчетов. Дело в том, что теория гармонического анализа предъявляла требования к исходной информации, которые не могли быть удовлетворены на практике. Вычисление коэффициентов рядов Фурье нельзя считать строгим из-за ограниченности исходной информации. Можно было говорить лишь об оценке их значений. Первым, кто внес существенный вклад в разработку методов спектрального оценивания, был А. Шустер. Им разработан метод периодограмм. Для оценки коэффициентов ряда Фурье Шустер использовал окно, длительность которого была кратна периоду колебания соответствующей гармоники. Периодограммой Шустер назвал сумму квадратов квадратур. Т.о., периодограммы представляли спектральную плотность мощности (СПМ) процесса. У периодограмм наблюдалась зависимость от выбора начала отсчета сигнала, хотя эта зависимость была менее выражена, чем у соответствующих им квадратур. Для устранения нерегулярностей Шустер предлагал проводить усреднение периодограмм. Однако практически из-за трудоемкости вычислений эту рекомендацию не всегда можно было реализовать.

В оптических исследованиях из-за ограниченности апертуры

прибора возникают дифракционные явления. Они же имеют место и при цифровом оценивании спектров. Здесь дифракция проявляется в виде боковых лепестков – появляются дополнительные максимумы в оценках спектра, не отражающие реальной картины исследуемого процесса. Для борьбы с боковыми лепестками использовались различные окна сглаживания. Однако подавление боковых лепестков приводило к другим искажениям спектра: уменьшению разрешающей способности.

Развитие цифровой вычислительной техники побудило угасающий интерес к периодограммам. В результате возник метод быстрого преобразования Фурье (БПФ). Однако возможности метода периодограмм были весьма ограничены. В конце последних десятилетий прошлого столетия наблюдался бум в разработке новых алгоритмов спектрального оценивания. Какого-либо организующего принципа при создании этих алгоритмов, как правило, не было. Создавалось впечатление, что спектральное оценивание превращается в своего рода искусство.

Некоторую надежду на обретение некоторой путеводной нити в обилии новых методов породило появление метода максимальной энтропии (ММЭ), предложенного в 1967 г Дж. Бергом [3]. Отказавшись от предположения, что за пределами окна наблюдения автокорреляционная функция обращается в ноль, он устранил основную причину появления боковых лепестков. Оказалось, что спектр максимума энтропии имеет авторегрессионный вид. Каких-либо новых форм СПМ ММЭ не предлагал.

В 1991 г. автором настоящего пособия было предложено выражение энтропии случайного процесса, отличное от Шенноновского [4]. Если энтропия Шеннона соответствовала процессу, для которого только амплитуда колебаний является случайной, то при выводе нового выражения дополнительно полагались случайными значения частоты. В последствие была предложена общая модель случайного процесса в виде ансамбля гармонических колебаний со случайными значениями частоты и комплексной амплитуды [5]. Для описания такого ансамбля вводилась функция плотности распределения колебаний (ФПРК) в пространстве значений частоты и амплитуды. Определяя энтропию как среднее логарифма ФПРК, можно использовать принцип максимума энтропии для оценки спектров любых порядков, тогда как традиционный ММЭ применим лишь при оценках СПМ.

Зачем нужно спектральное оценивание? Для ответа на этот вопрос следует ясно понимать, что спектральное оценивание не добавляет какой-либо дополнительной информации к той, что уже заложена в исходных рядах данных. Спектральный анализ лишь позволяет взглянуть на исследуемый процесс под другим ракурсом. Природные явления представляют собой композицию из многих процессов. И только тогда, когда в этой композиции мы желаем обнаружить и оценить степень влияния гармонических колебаний, следует использовать спектральное оценивание. К слову сказать, представление результатов наблюдения ансамблем гармонических колебаний не является единственной возможностью изменения ракурса представления этих результатов. Ракурс следует выбирать исходя из целей исследования.

1. Фурье преобразование

Основной спектральной оценкой являются преобразования Фурье:

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (0.1)$$

Проблемы при вычислении спектра $X(\omega)$ на практике возникают из-за неполноты информации об исходном сигнале $X(t)$. Обычно непрерывный процесс $X(t)$ представляется рядом дискретных измерений $X(t_k)$. Как правило, дискретизация аргумента проводится эквидистантно: $t_k = t_0 + k\Delta t$. Даже при неограниченном ряде значений $X(t_k)$ найти комплексный спектр $X(\omega)$ можно только при условии, если этот спектр финитный и ширина его полосы частот в два раза меньше значения частоты дискретизации сигнала (теорема Котельникова [6]). В этом случае комплексный спектр сигнала представляется тригонометрическим рядом:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(-i\omega k); \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (0.2)$$
$$\omega = \omega' \Delta t, \quad t_k = k = t'_k / \Delta t.$$

Здесь – время t_k и частота ω – безразмерные; (размерными записаны штрихованные величины). Значения коэффициентов ряда равны соответствующим значениям исходной последовательности: $c_k = X(t_k) \equiv X_k$.

Согласно (0.2), для вещественных последовательностей выполняется условие: $X^*(\omega) = X(-\omega)$, (* – комплексное сопряжение). Таким образом, спектр вещественных сигналов полностью определяется значениями $X(\omega)$ при $\omega \geq 0$.

Если $X(\omega) \neq 0$ при $\omega > \pi$, то для определения комплексного спектра выражение (2) заменяется следующим:

$$X(\omega) = X_m(\omega), \quad \text{при } \omega \in [(m-1)\pi, m\pi],$$
$$X_m(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{km} \exp(-i\omega k). \quad (0.3)$$

В этом случае связь между коэффициентами ряда и исходной

последовательностью определяются выражением: $x_k = \sum_{m=1}^{\infty} c_{km}$. Таким образом, каждый отсчет сигнала определяется суммой вкладов всех полос частот ($1 \leq m < \infty$). Вклад каждой из полос является неопределенным. Ситуация, когда в сигнале присутствуют полосы частот с $m > 1$, соответствует стробоскопическому эффекту. Обнаружить наличие этого эффекта можно лишь увеличением частоты дискретизации. На рис.1 в качестве примера приведен амплитудный спектр вариаций напряженности межпланетного магнитного поля при периоде дискретизации 16 секунд (рис. 1 а) и при периоде 1 с. (рис. 1 б) [7]. Отмечается сходство спектров в окрестности триплета спектральных линий 1, 2 и 3. Периоды колебаний первого триплета близки к 48 с, а второго 12 с. Корабль АСЕ, производящий измерения магнитного поля, вращается с периодом 5 оборотов в минуту. Именно это вращение определяет форму спектра на правом рисунке. Наличие подобных линий на левом рисунке является лишь проявлением стробоскопического эффекта.

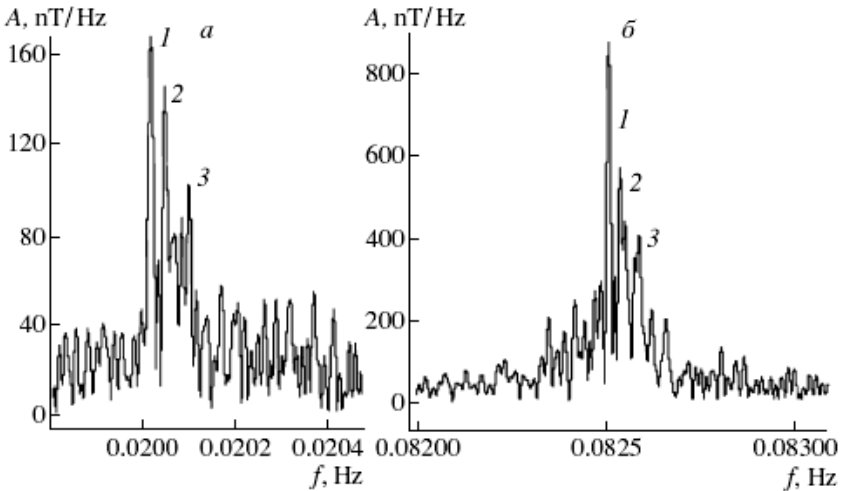


Рис. 1

Все проблемы, возникающие при спектральном оценивании, определяются двумя причинами: конечностью частоты дискретизации сигнала и ограниченностью последовательности, представляющей исследуемый процесс.

2. Дискретные модели спектров

Модель сигнала с дискретным спектром представляется следующим выражением:

$$X_j = \sum_{k=1}^p A_k \exp(i\omega_k j) + n_j; 1 \leq j \leq N, p < N/2. \quad (0.4)$$

Здесь n_j – шумовая компонента.

Методы оценки дискретных спектров можно разделить на три группы. В одну группу входит классический метод дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и всевозможные его модификации. Ко второй группе относятся методы, использующие авторегрессионную (АР) модель сигнала. К ним относятся методы Прони и Писаренко. В этих методах на первом этапе находятся коэффициенты авторегрессии, а затем вычисляются значения частот и амплитуд гармоник. Наконец, в методах третьей группы значения частот и амплитуд оцениваются непосредственно по исходному ряду.

ДПФ оценивает лишь значения комплексных амплитуд A_k , значения частот ω_k – известны. В двух других группах методов основная задача заключается в нахождении значений не только амплитуд, но и частот $\omega_1, \dots, \omega_p$ гармоник. Кроме того, неизвестным является число компонент p , которое также необходимо находить.

2.1. Дискретное преобразование Фурье

В ДПФ математика превалирует над физикой. Действительно, здесь любой исходный ряд, содержащий N отсчетов, представляется суммой $N/2$ гармонических колебаний. В основе такого представления лежит возможность представлять любую последовательность чисел линейной комбинацией ортогональных векторов единичной длины:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{e}_k, \quad a_k = \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_k. \quad (0.5)$$

В базисе векторов \mathbf{e}_k , компоненты которых e_{ki} равны символам Кронекера δ_{ki} , коэффициенты ряда (0.5) равны значениям исходной последовательности: $a_k = X_k$.

Базис ДПФ образуется тригонометрическими функциями:

$$e_{2k-1,j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos(\omega_k j), \quad e_{2k,j} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin(\omega_k j). \quad (0.6)$$

Ортогональность этого базиса обеспечивает эквидистантный выбор

значений частот: $\omega_k = \omega_0 + (k-1)\pi/N$.

В стандартных алгоритмах ДПФ $\omega_0=0$ и количество орт, представленных косинусами на 2 больше, чем синусами. При выборе $\omega_0 = \pi/2N$ количества тех и других орт становится равным. В стандартном ДПФ «гребенка» частот содержит $N/2+1$, зубьев, во втором – $N/2$. Зубцы гребенки этих двух версий ДПФ смещены по оси частот друг относительно друга на половину интервала между зубцами. При изменении длины исходного ряда положение зубцов на оси частот смещается. Сигнал, представленный одним гармоническим колебанием, частота которого не совпадает со значением частоты какого-либо зубца гребенки ДПФ, будет проецироваться на все его орты. Это указывает, что ДПФ дает весьма грубое представление о спектрах сигналов. Однако благодаря простоте и вычислительной эффективности этот алгоритм имеет широкое применение, как в научных исследованиях, так и при решении практических задач.

Для оптимизации проведения ДПФ в 1965 г. Дж.У. Кули и Дж.У. Тюки предложили алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

2.2. Метод Прони

Метод Прони был разработан с целью аппроксимации закона расширения газов набором экспоненциальных функций. Опубликован метод был в 1796 г., т.е. за четверть века до появления знаменитой диссертационной работы Фурье. Тем не менее, этот метод пользуется популярностью до сих пор.

Современный вариант метода Прони существенно отличается от оригинала. Различают обобщенный и частный варианты метода Прони. В обобщенном методе в качестве компонент сигнала используются экспоненциально затухающие колебания. В этом методе оценке подлежат амплитуды, фазы, частота и коэффициент затухания. В частном методе коэффициент затухания считается равным нулю. Сигнал представляется смесью белого шума и гармоник с неизвестными значениями частот ω_k , и комплексных амплитуд A_k .

Сначала находятся коэффициенты линейного предсказания a_k . Для вещественных рядов $a_k = a_{-k}$. Соответственно ошибка линейного предсказания определяется выражением

$$\varepsilon_j = \sum_{k=0}^p a_k (X_{j+k} + X_{j-k}), a_0 = 1.$$

Коэффициенты предсказания находятся путем решения уравнения Юла-Уокера:

$$\sum_{j=0}^p R_{ij} a_j = \sigma^2 \delta_{i0}; R_{ij} = \sum_{k=p+1}^{N-p} (X_{k+i} + X_{k-i})(X_{k+j} + X_{k-j}).$$

Значения частот ω_k гармоник определяются путем нахождения корней полинома

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{p-k}; \omega_k = \arctg(\text{Im}(z_k) / \text{Re}(z_k)). \quad (0.7)$$

Комплексные амплитуды A_k находятся методом наименьших квадратов. Минимизируя функционал

$$\Phi = \sum_{k=0}^{N-1} (X_k - \mathcal{X}_k)^2; \text{где } \mathcal{X}_k = \sum_{j=1}^p A_j z_j^k, \quad (0.8)$$

можно получить алгебраическую систему линейных уравнений:

$$B^H BA = B^H X; X = (X_0, \dots, X_{N-1})^T, A = (A_1, \dots, A_p)^T;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь верхние индексы T и H означают транспонирование и транспонирование комплексно-сопряженных матриц, соответственно.

2.3 Метод Писаренко

Достаточно полное описание метода можно найти в обзорной статье [8]. Метод имеет дело с сигналами, являющимися смесью p синусоид и белого шума. Автокорреляционная функция таких сигналов имеет вид

$$R_k = \sum_{j=1}^p W_j \cos(\omega_j k) + \delta_{k0} \sigma^2. \quad (0.9)$$

В этом выражении неизвестными являются интенсивность W_j и частота ω_j каждого из p колебаний и мощность шума σ^2 . Известными считаются $2p+1$ отсчета R_k . Из этих отсчетов строится матрица

$$R = \begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & \dots & R_{-2p} \\ R_1 & R_0 & \dots & R_{1-2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2p} & R_{2p-1} & \dots & R_0 \end{pmatrix}. \quad (0.10)$$

Из компонент собственного вектора этой матрицы \mathbf{a} , соответствующего минимальному собственному значению λ_{\min} , образуется полином

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{2p} a_k z^{2p-k}. \quad (0.11)$$

Корни приведенного полинома $z_j = \exp(i\omega_j)$ определяют искомые значения частоты колебаний. Поскольку процесс вещественный, то коэффициенты полинома (0.11) удовлетворяют условию $a_k = a_{2p-k}$. В силу этого условия каждому из p колебаний соответствуют два корня z_j и z_j^* .

Для вычисления интенсивности колебаний решается система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^p \cos(\omega_j k) W_j = R_k. \quad (0.12)$$

Значение интенсивности шума σ^2 приравнивается значению λ_{\min} .

Метод Писаренко весьма чувствителен к правильности определения количества колебаний в модели сигнала.

2.4 Дискретное ангармоническое преобразование Фурье

Описание метода дискретного ангармонического преобразования Фурье (ДАПФ) представлено в работе [9]. Суть метода заключается в нахождении в N -мерном пространстве плоскости минимальной размерности, проекция исходного сигнала \mathbf{X} на которую является максимальной.

Гиперплоскость минимальной размерности определяется матрицей \mathbf{Y} , компоненты которой представляются следующими выражениями

$$Y_{2k-1,j} = \cos(\omega_k j), Y_{2k,j} = \sin(\omega_k j); 1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq N. \quad (0.13)$$

Проекция сигнала \mathbf{X} на гиперплоскость \mathbf{Y} определяются следующей суммой

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^{2p} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k. \quad (0.14)$$

Где векторы \mathbf{e}_k получаются путем ортонормализации векторов \mathbf{y}_k , представляющими k -ю строку матрицы \mathbf{Y} .

Значения частот $\omega_1, \dots, \omega_p$ находятся из условия минимума функционала $\Phi(\omega_1, \dots, \omega_p) = \|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2$.

Окончательно модель сигнала представляется линейной комбинацией векторов \mathbf{y}_k :

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{k=1}^{2p} A_k \mathbf{y}_k. \quad (0.15)$$

Процедура отыскания значений параметров модели (0.15) состоит из следующих этапов.

- 1) Путем сканирования по частоте находится значение частоты ω_1 , которое минимизирует функционал $\Phi(\omega_1)$.
- 2) Затем ищется частота второй гармоники при фиксированном значении ω_1 (минимизируется функционал $\Phi(\omega_2|\omega_1)$).
- 3) Уточняются значения частот ω_1, ω_2 , путем покоординатного спуска в точку минимума функционал $\Phi(\omega_1, \omega_2)$. Если значения функционала превосходят заранее заданный порог ε , то ищется следующая линия в спектре аналогично поиску второй линии. Процесс прекращается по условию $\Phi < \varepsilon$.

Алгоритм ДАПФ позволяет разрешать линии сравнимых интенсивностей, различающиеся по частоте на величину 0.2 дискрета ДПФ. В отсутствии шумов ограничения на точность диктуются в основном соображением экономии компьютерного времени.

2.5. Метод инвариантных подпространств

Основные затраты компьютерного времени в ДАПФ приходятся на процесс поиска гиперплоскости, содержащей гармоники исследуемого сигнала. Этот процесс может быть существенно ускорен, если поиск гиперплоскости проводить на основе свойства инвариантности гармонических колебаний относительно операции свертки [13].

В отличие от ДАПФ, в котором индекс исходного сигнала X_j принимает положительные целочисленные значения, в методе инвариантных подпространств (МИП) удобно индексирование сигнала проводится симметрично относительно 0, т.е.: $(-N \leq j \leq N)$. Свертка

сигналов $\mathbf{Z} = \mathbf{X} * \mathbf{Y}$ проводится в МИП следующим образом:

$$\mathcal{Z}(j') = \sum_{k=0}^N X(j' - k) \mathcal{Y}(k); 0 \leq j' \leq N. \quad (0.16)$$

В приведенном выражении свертки используются вектора различной размерности: у векторов со шляпкой индекс принимает только неотрицательные значения, соответственно размерность этих векторов равна $N+1$, тогда как размерность векторов без шляпки – $2N+1$.

Гармоническое колебание с частотой ω_α может быть представлено последовательностью экспонент

$$e_\alpha(j) = \exp(i\omega_\alpha j), -N \leq j \leq N; \quad \mathbf{e}_\alpha(j) = \exp(i\omega_\alpha j), 0 \leq j \leq N. \quad (0.17)$$

Вектор \mathbf{e}_α инвариантен с точностью до постоянного множителя относительно операции свертки с любым другим вектором \mathbf{e}_β . Действительно

$$\mathbf{e}_\alpha * \mathbf{e}_\beta = D_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha, \quad D_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^N \exp(i(\omega_\alpha - \omega_\beta)k).$$

Для оценки значений частот ω_α предварительно находятся орты \mathbf{a}_α подпространства, содержащего искомого колебания. Если сигнал содержит p гармоник, то соответствующее им подпространство имеет размерность $2p$. В качестве первого орта может быть взят нормированный вектор исходного сигнала, т.е. $\mathbf{a}_1 = \mathbf{X} / |\mathbf{X}|$. Следующие орты находятся как результат операций свертки, ортогонализации и нормировки:

$$\mathbf{b} = \mathbf{X} * \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{b} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{a}_i \mathbf{b}) \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{Y} / |\mathbf{Y}|. \quad (0.18)$$

Значения частот оцениваются путем нахождения минимумов функционала

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= 1 + N - \sum_{k=1}^{2p} \left((\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{e}(\omega))^2 + (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{s}(\omega))^2 \right); \\ \mathbf{e}(\omega) &= \{1, \cos(\omega), \dots, \cos(\omega N)\}, \\ \mathbf{s}(\omega) &= \{0, \sin(\omega), \dots, \sin(\omega N)\}. \end{aligned} \quad (0.19)$$

Результатом процедуры МИП является модель исследуемого сигнала $\mathbf{X}^?$, представляемая линейной комбинацией гармонических колебаний и шума \mathbf{n} :

$$\mathbf{X}' = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \mathbf{n}.$$

Оценка амплитуд гармоник производится методом наименьших квадратов. Минимизируется квадратичная невязка между исходным и модельным сигналами.

Испытания МИП показали, что этот метод обладает свойством сверхразрешения при высокой чувствительности. При исследовании сигнала, представленного суперпозицией белого шума и двух гармонических колебаний с близкими значениями частот (разность частот меньше значения обратной длительности окна наблюдения), алгоритм позволял на фоне сильного сигнала выделять колебание, амплитуда которого была на 12 порядков ниже амплитуды основного колебания. При этом уровень шумов превосходил амплитуду слабого колебания. Применение БПФ при анализе такого сигнала не позволяло обнаружить слабое колебание, поскольку уровень этого колебания был существенно ниже уровня боковых лепестков БПФ. Попытка использования окон сглаживания так же была обречена на провал, так как окна увеличивали ширину основного лепестка, а значение частоты слабого колебания находились в пределах этого лепестка.

3. Оценки непрерывных спектров

Лишь периодические процессы могут быть представлены дискретными рядами Фурье. В природе подобные процессы являются скорее исключением, чем правилом. Спектральный анализ непериодических процессов требует непрерывного преобразования Фурье (НПФ). На практике непосредственная реализация НПФ невозможна, поскольку исследователю доступна ограниченная во времени информация о сигнале. Как правило, сигнал содержит детерминированную и случайную компоненту.

В условии ограниченности информации строгое разделение этих компонент невозможно. Не существует критериев, по которым можно было бы разделить эти компоненты. В подобных условиях следует использовать априорную информацию о характере каждой из компонент сигнала. Связь между случайными процессами и спектральным оцениванием наиболее полно определена для стационарных в широком смысле процессов. Первые моменты и комплексный спектр таких процессов равны нулю, а под спектром процесса понимается спектральная плотность мощности (СПМ). Существуют параметрические и непараметрические методы оценки СПМ.

3.1 Непараметрические методы оценки СПМ случайных процессов

К непараметрическим следует отнести периодограммные и коррелограммные методы. Основой периодограммной оценки СПМ является следующее выражение

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-i\omega k) \right|^2. \quad (0.20)$$

Однако оценки СПМ этим методом свойственна нерегулярность. Причины нерегулярности в оценках периодограмм не только методические, но и следствие наличия шумов в исследуемых процессах. Существуют различные способы сглаживания нерегулярностей в оценках спектров таких процессов.

Например, в периодограммах Даньелла сглаживание производится в пространстве частот. После оценки СПМ согласно (0.20) для каждого из значений частоты в пределах некоторого окна производится усреднение оценок СПМ по соседним частотам.

В методе Бартлетта получение сглаженных периодограммных оценок производится путем разбиения исходной последовательности на ансамбль не перекрывающихся сегментов. Для каждого из сегмента производится оценка СПМ, а сглаживание осуществляется усреднением этих оценок.

Сглаживание оценок СПМ возможно не только усреднением периодограмм, но и путем оценки корреляционных функций с последующим вычислением спектральной плотности мощности (СПМ). Согласно теореме Винера-Хинчена для стационарных случайных процессов выполняется соотношение:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (0.21)$$

Теорема была доказана в 30-х годах прошлого столетия Н. Винером и независимо А. Хинчиным [15]. Если полоса частот процесса Δ конечна, то интеграл (0.21) может быть заменен рядом Фурье:

$$G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k \exp(-i\omega k). \quad (0.22)$$

Здесь, $R_k = R(\tau_k)$, $\tau_k = Tk$. Кроме того, шаг дискретизации времени T и ширина полосы частот процесса должны удовлетворять неравенству: $\Delta T < 2\pi$.

На практике оценка СПМ производится для ограниченной последовательности автокорреляционной функции, что приводит к искажениям в оценке спектра.

3.2 Параметрические методы оценки СПМ

Большую часть параметрических методов аккумулирует в себе рациональная модель спектров. Одним из первых, предложивших такую модель для описания стационарных процессов, был А.М. Яглом [12]. В методах цифрового спектрального оценивания соответствующая модель называется авторегрессионной со скользящим средним (АРСС) и представляется отношением двух тригонометрических полиномов:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sigma^2 |B(\omega)|^2 / |A(\omega)|^2, \\ B(\omega) &= 1 + \sum_{k=1}^q b_k \exp(-i\omega k), \\ A(\omega) &= 1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-i\omega k). \end{aligned} \quad (0.23)$$

Искомыми параметрами, определяющими вид СПМ

$G(\omega)$, являются коэффициенты полиномов a_k и b_k , значения q и p , задающие порядок модели, значение σ , соответствующее интенсивности шума.

Параметры a_k называются коэффициенты авторегрессии (АР), а b_k – коэффициентами скользящего среднего (СС). Соответственно, если все $b_k=0$, то процесс является авторегрессионным, при всех $a_k=0$ имеет дело с СС процессом.

Числовую последовательность x_n , соответствующую АРСС процессу, можно генерировать решетчатым фильтром с p полюсами и q нулями:

$$x_n = s_n + \sum_{k=1}^q b_k s_{n-k} - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}. \quad (0.24)$$

Алгоритмы расчетов коэффициентов модели можно найти в работах [2, 8].

3.3 Кусочно-непрерывные спектральные оценки

В [20] предлагается кусочно-непрерывная модель комплексного спектра, в которой значения квадратур считаются постоянными в пределах выбранных интервалов частот. Т. е. комплексный спектр $S(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$ представляется набором значений (A_k, B_k) и полагается, что $A(\omega) = A_k$, $B(\omega) = B_k$ при $\omega \in [\omega_{k-1}, \omega_k]$. Предлагаемой модели комплексного спектра соответствует следующая параметрическая модель сигнала во временной области:

$$\begin{aligned} \langle S(t) \rangle &= \sum_{k=1}^K (A_k \varphi_k(t) + B_k \psi_k(t)), \\ \varphi_k(t) &= \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \cos(\omega t) d\omega, \quad \psi_k(t) = \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (0.25)$$

Оценка значений параметров A_k, B_k производится методом наименьших квадратов (МНК). Соответствующий МНК функционал среднеквадратичной невязки исходного $S(t_i)$ и модельного $\langle S(t_i) \rangle$ сигналов представляется следующей суммой:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N (S(t_i) - \langle S(t_i) \rangle)^2. \quad (0.26)$$

Здесь N – длина ряда, представляющего исследуемый сигнал во временной области. Варьируя этот функционал по неизвестным па-

раметрам, можно получить следующую систему уравнений для оценки значений этих параметров:

$$A_k C_{k,j} = F_j, \quad B_k C_{k+K,j} = F_j, \quad k=1,\dots,K, \quad j=1,\dots,2K. \quad (0.27)$$

Здесь C - блочная матрица размером $2K \times 2K$, элементы которой определяются следующими выражениями:

$$C_{k,j} = \sum_{i=1}^N \varphi_k(t_i) \cdot \varphi_j(t_i), \quad C_{k,j+K} = \sum_{i=1}^N \varphi_k(t_i) \cdot \psi_j(t_i), \\ C_{k+K,j} = \sum_{i=1}^N \psi_k(t_i) \cdot \varphi_j(t_i), \quad C_{k+K,j+K} = \sum_{i=1}^N \psi_k(t_i) \cdot \psi_j(t_i), \quad 1 \leq k, j \leq K.$$

Правые части системы уравнений (0.27) определяются суммами:

$$F_j = \sum_{i=1}^N S(t_i) \cdot \varphi_j(t_i), \quad F_{j+K} = \sum_{i=1}^N S(t_i) \cdot \psi_j(t_i), \quad 1 \leq j \leq K.$$

Вычисление функций $\varphi_k(t)$ и $\psi_k(t)$ требует определения сетки частот: $[\omega_{k-1}, \omega_k]$; $k=1,\dots,K$. Прежде всего, эта сетка должна быть выбрана таким образом, чтобы обусловленность матрицы C обеспечивала возможность её обращения. Далее, из набора сеток, подчиняющихся указанному ограничению, следует выбрать ту, которая обеспечивает минимум значения функционала невязки (0.26) для выбранного класса исследуемых сигналов.

В отличие от большинства методов спектрального оценивания, которые работают с эквидистантными рядами, данный алгоритм применим к неэквидистантным последовательностям. Существуют ряды данных, которые в принципе не могут быть эквидистантными. К таким рядам относятся RR-интервалы.

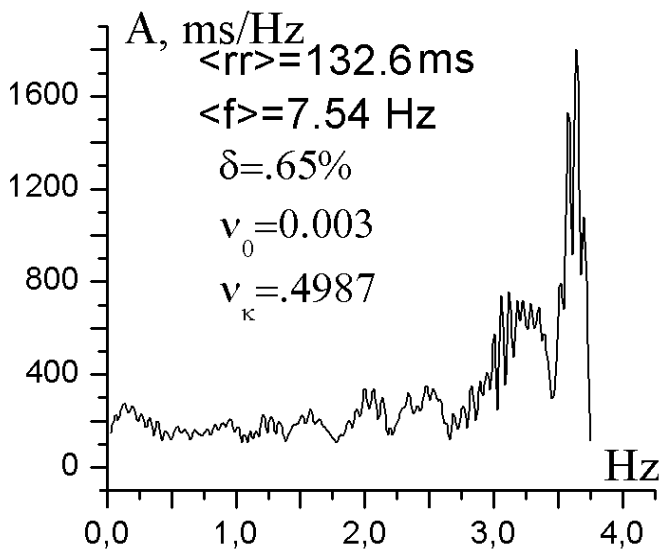


Рис.2

На рис.2 приводится спектр RR-интервал мыши. Исходный ряд, содержащий 1000 отсчетов, был предоставлен автору профессором биолого-почвенного факультета ТГУ Агуловой Л.П..

4. Энтропийные принципы спектрального оценивания

Существенным недостатком параметрических методов спектрального оценивания является отсутствие строгих обоснований выбора порядка модели. Коррелограммный способ оценки СПМ избавлен от этой проблемы. Однако здесь возникает другая трудность – конечность выборки вынуждает использовать предположение о равенстве нулю значений автокорреляционной функции процесса за пределами окна наблюдения. Следствием этого предположения является возникновение боковых лепестков в оценках СПМ. В 1967 г. Д. Берг для оценки СПМ предложил вместо предположения обращения в ноль автокорреляционной функции за пределами окна наблюдения использовать принцип максимума энтропии (МЭ). Берг использовал следующее выражение энтропии:

$$H_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln G(\omega) d\omega. \quad (0.28)$$

Впервые этот функционал в качестве определения энтропии стационарного процесса, являющегося результатом фильтрации белого шума, был предложен К. Шенноном в 1948 г. [13]. Справедливости ради, следует сказать, что ранее в 1941 г. подобный функционал без придания ему статуса энтропии приводился в работе В.Н. Засухина [14].

4.1 Определение энтропии стационарного процесса в виде функционала СПМ

Обычно в качестве обоснования выбора принципа МЭ для оценки СПМ высказывается мнение, что состояние с СПМ МЭ реализуется наибольшим числом способов [15]. В действительности это не так по двум причинам. Во-первых, как показано в [4, 5], выражение энтропии (0.28) соответствует частному случаю, когда значения частоты колебаний распределены равномерно в интервале $[0, \pi]$. Если же распределение частот неравномерно, то следует использовать иное выражение:

$$H = 2 \ln \int_0^{\pi} \sqrt{G(\omega)} d\omega. \quad (0.29)$$

Во-вторых, значение энтропии, определяемое выражением (0.29)

, больше значения энтропии Шеннона для любых СПМ (кроме белого шума, когда они равны). Соответственно СПМ, максимизирующая значение энтропии в форме (0.29), реализуется большим числом способов, чем СПМ максимума энтропии Шеннона.

Для понимания физического смысла понятия энтропии случайных процессов необходимо иметь их физическую модель. В этом случае рассуждения о числе способов реализации процесса приобретают осязаемую реальность. При получении выражения (0.29) в качестве модели случайного процесса брался ансамбль некоррелирующих между собой осцилляторов. Состояние ансамбля можно описывать одночастичной функцией плотности распределения колебаний (ФПРК) $f(p, \omega)$, где p – интенсивность, а ω – частота колебаний. Соответственно, $f(p, \omega)dpd\omega$ определяет вероятность нахождения осциллятора в элементе фазового объема $dpd\omega$. Если следовать Больцману [16], определяя энтропию как логарифм числа реализаций состояния ансамбля, то энтропия, приходящаяся на один осциллятор, определится интегралом

$$H = - \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(p, \omega) \ln(f(p, \omega)) dp d\omega. \quad (0.30)$$

Интеграл по интенсивности от функции $f(p, \omega)$ представляет плотность вероятности $\rho(\omega)$ обнаружения осциллятора на частоте ω :

$$\rho(\omega) = \int_0^{\infty} f(p, \omega) dp. \quad (0.31)$$

Таким образом, функция $\rho(\omega)$ является моментом нулевого порядка (по интенсивности) функции $f(p, \omega)$ и далее именуется спектральной плотностью колебаний (СПК).

Средняя интенсивность такого осциллятора определяется первым моментом функции $f(p, \omega)$:

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} pf(p, \omega) dp. \quad (0.32)$$

Используя эти интегралы в качестве дополнительных условий при решении вариационной задачи поиска максимума энтропии, можно получить

$$f(p, \omega) = \exp(-\lambda_0(\omega) - \lambda_G(\omega)p). \quad (0.33)$$

Здесь C – коэффициент, нормирующий ФПРК $f(p, \omega)$ на единицу. Значения неопределенных множителей Лагранжа $\lambda_0(\omega)$ и $\lambda_G(\omega)$,

обеспечивающих выполнение условий (4.4) и (4.5), определяются выражениями

$$\lambda_G(\omega) = \rho(\omega) / G(\omega), \lambda_0(\omega) = -\ln(\rho^2(\omega) / G(\omega)).$$

Подставляя эти выражения в (0.33) и производя интегрирование в (0.30), можно получить

$$H = \int_0^{\pi} \rho(\omega)(1 - \ln(\rho^2 / G))d\omega. \quad (0.34)$$

Если $\rho(\omega)=1/\pi$, то

$$H = 1 + 2\ln \pi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(G)d\omega. \quad (0.35)$$

Т.е., с точностью до аддитивной постоянной получаем выражение энтропии Шеннона (0.28). Если же плотность осцилляторов $\rho(\omega)$ выбрать исходя из условия максимума энтропии в форме (4.7), то

$$H = 1 + 2\ln \int_0^{\pi} \sqrt{G}d\omega. \quad (0.36)$$

При этом $\rho(\omega) = \frac{\sqrt{G}}{\int_0^{\pi} \sqrt{G}d\omega}$.

4.2 Оценки СПМ, максимизирующие энтропию

Оценка СПМ согласно (0.6), когда суммирование ряда проводится до некоторого конечного N , предполагает, что $R_k = 0$ при $|k| > N$. В действительности процесс может иметь отличные от нуля значения автокорреляционной функции, однако эти значения экспериментатору неизвестны. Берг предложил заменить условие $R_k = 0$ ($|k| > N$) предположением о независимости значений энтропии от этих отсчетов, т.е.: $\delta H / \delta R_k = 0$ при $|k| > N$. Если энтропию определять по Шеннону, то

$$\delta H / \delta R_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G^{-1}(\omega) \exp(-i\omega k) d\omega. \quad (0.37)$$

Поскольку функция $G^{-1}(\omega)$ финитная, то она может быть представлена рядом Фурье

$$G^{-1}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k \exp(-i\omega k).$$

Коэффициенты этого ряда определяются интегралом

$$Q_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G^{-1}(\omega) \exp(i\omega k) d\omega.$$

Следовательно, $\delta H / \delta R_k = Q_{-k}$, а значит $Q_k=0$ при $|k|>N$ и СПМ $G(\omega)$ может быть представлена в следующем виде

$$G(\omega) = \left(\sum_{k=-N}^N Q_k \exp(-i\omega k) \right)^{-1}. \quad (0.38)$$

В силу положительной определенности СПМ выполняются равенства: $R_k=R_k^*$ и $Q_{-k}=Q_k^*$. Эти равенства позволяют факторизовать сумму в правой части (28), т.е. записать её в виде произведения двух полиномов:

$$\sum_{k=-N}^N Q_k \exp(-i\omega k) = A(z)A^*(1/z^*)/\sigma^2, \text{ где } A(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}.$$

Окончательное выражение СПМ, соответствующее максимуму энтропии Шеннона, имеет вид

$$G(\omega) = \frac{\sigma^2}{A(\exp(i\omega))A^*(\exp(-i\omega))}. \quad (0.39)$$

Следует отметить, что выражение (0.39) представляет спектр авторегрессионного процесса. Значит, подход Берга не привел к появлению новых форм спектра, а лишь обосновал АР модель спектра. Тем не менее, сама идея использовать понятие энтропии для оценки спектров чрезвычайно конструктивна, поскольку выражение Шеннона (0.28) не исчерпывает всех форм представления энтропии случайных процессов.

4.3 Оценка СПМ по ограниченной последовательности автокорреляционной функции

Выражение для СПМ в форме (0.39) может быть получено каноническим способом. Если решается задача оптимизации некоторого функционала $H(G)$ при наличии ряда ограничений, наложенных на функцию G , то выражения для искомой функции G получаются из условия равенства нулю вариаций функции Лагранжа $L(G)$.

В предыдущих параграфах гармонические колебания представлялись экспонентой с мнимым показателем ($\exp(i\omega k)$). Если рассматривать веще-

ственные стационарные в широком смысле процессы, то для них выполняются условия $G(-\omega)=G(\omega)$ и $R_{-k}=R_k$. В этом случае при преобразованиях Фурье СПМ целесообразно вместо комплексной экспоненты использовать косинусы [6]. Соответственно, коэффициенты АП эквидистантно дискретизированных процессов определяются следующими интегралами

$$R_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(\omega) \cos(\omega k) d\omega. \quad (0.40)$$

В эксперименте известна лишь ограниченная последовательность этих коэффициентов ($|k| \leq N$). Функция Лагранжа, соответствующая энтропии и известным значениям АП, имеет вид

$$L(G) = H(G) + \sum_{k=0}^N \lambda_k \left(R_k - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(\omega) \cos(\omega k) d\omega \right). \quad (0.41)$$

Если энтропия определяется по Шеннону, согласно (0.28), то из условия $\delta L/\delta G=0$ сразу следует выражение для СПМ

$$G_1(\omega) = \frac{1}{\lambda(\omega)}; \quad \lambda(\omega) = \sum_{k=0}^N \lambda_k \cos(\omega k). \quad (0.42)$$

Если учитывать, что $\cos(\omega k) = (\exp(i\omega k) + \exp(-i\omega k))/2$, то выражение (0.42) идентично (0.38).

Когда (0.36) используется в качестве выражения энтропии, то из условия $\delta L/\delta G=0$ следует

$$G_2(\omega) = \frac{1}{\lambda^2(\omega)U}; \quad \lambda(\omega) = \sum_{k=0}^N \lambda_k \cos(\omega k). \quad (0.43)$$

Здесь U – статистический интеграл, определяемый выражением

$$U = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\lambda(\omega)}. \quad (0.44)$$

Посредством логарифма статистического интеграла можно определить энтропию процесса. Подстановка (0.43) в выражение (0.36) позволяет представить энтропию следующим образом:

$$H = \text{Ln}U + 1 + 2\text{ln}\pi.$$

В пространстве параметров λ_k это выражение играет роль потенциальной функции автокорреляционной последовательности. Действительно

$$-\frac{\partial \text{Ln}(U)}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{\pi U} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\omega k)}{\lambda^2(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(\omega) \cos(\omega k) d\omega = R_k. \quad (0.45)$$

К сожалению, решить эту систему уравнений относительно множителей Лагранжа в общем случае не представляется возможным.

4.4 Полюсные модели спектров

Предпочтительность выбора энтропии в форме (4.9) перед шенноновским определением можно проиллюстрировать на примере полюсных моделей СПМ.

При оценке СПМ согласно выражений (0.42) или (0.43) одной из основных и наиболее трудной является проблема вычисления коэффициентов полиномов, фигурирующих в этих выражениях. Значения этих коэффициентов должны соответствовать значениям автокорреляционной последовательности. Проблема отыскания коэффициентов полинома может быть заменена задачей отыскания его корней. Тригонометрический полином (0.42) можно записать в виде степенного полинома комплексной переменной $z=\exp(i\omega)$:

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \lambda_k (z^k + 1/z^k). \quad (0.46)$$

Полином (0.46) имеет вещественные коэффициенты, кроме того, эти коэффициенты одинаковы при положительных и отрицательных степенях z . Эти особенности полинома существенно упрощают поиск его корней. Во-первых, каждому комплексному корню среди корней полинома будет соответствовать комплексно-сопряженный [17], т.е. комплексные корни полинома (0.46) встречаются парами: z_i и z_i^* . Во-вторых, все корни (вещественные и комплексные) образуют пары: z_i и $1/z_i$. В результате полином (0.46) можно представить в следующем виде

$$\lambda(z) = \frac{\lambda_N}{2z^N} \prod_{i=1}^M (z - x_i) \left(z - \frac{1}{x_i} \right)^{(N-M)/2} \prod_{k=1}^M (z - z_k) \left(z - \frac{1}{z_k} \right) (z - z_k^*) \left(z - \frac{1}{z_k^*} \right). \quad (0.47)$$

Здесь x_i – вещественные, а z_i – комплексные корни полинома.

Не нарушая общности, положение корней можно выбирать так, чтобы выполнялись неравенства $|x_i| < 1$ и $|z_i| < 1$.

Для отыскания корней вовсе не надо знать коэффициенты исходных полиномов. Можно, воспользовавшись теорией вычетов при вычислении интегралов (0.40), искать корни, соответствующие исходной АП. Интеграл в выражении (0.40) по вещественной переменной ω может быть заменен интегралом по окружности единичного радиуса по комплексной переменной z :

$$R_k = \frac{1}{4\pi i} \oint_{|z|=1} G(z) (z^{k-1} + z^{-k-1}) dz. \quad (0.48)$$

Если СПМ вычисляется согласно (0.42), то

$$G_1(z) = \frac{1}{z\lambda(z)}; \quad z = \exp(i\omega).$$

Подставляя в интеграл (0.48) это выражение, можно получить

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{\delta_{k,N}}{\lambda_N} + \frac{1}{\lambda_N} \left(\sum_{i=1}^M \frac{x_i^{N+k-1} + x_i^{N-k-1}}{\Phi_i} \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda_N} \left(\sum_{j=1}^{(N-M)/2} \frac{z_j^{N+k-1} + z_j^{N-k-1}}{\Psi_j} + \text{к.с.} \right), \\ \Phi_i &= (x_i - 1/x_i) \cdot \prod_{m=1, m \neq i}^M (x_i - 1/x_m)(x_i - x_m) \\ &\cdot \prod_{m=1}^{(N-M)/2} (x_i - z_m)(x_i - z_m^*)(x_i - 1/z_m)(x_i - 1/z_m^*), \\ \Psi_j &= (z_j - z_j^*)(z_j - 1/z_j)(z_j - 1/z_j^*) \cdot \prod_{m=1}^M (z_j - 1/x_m)(z_j - x_m) \\ &\cdot \prod_{m=1, m \neq j}^{N/2} (z_j - z_m)(z_j - z_m^*)(z_j - 1/z_m)(z_j - 1/z_m^*). \end{aligned}$$

(0.49)

Здесь символ Кронекера $\delta_{k,N}$ появляется из-за наличия полюса $z_0 = 0$ при вычислении R_N .

Для модели СПМ $G_2(\omega)$ с учетом того, что полюса здесь второго порядка, связь между АП и полюсами определяется другим выражением:

$$\begin{aligned}
R_k &= \frac{2}{\lambda_N^2 U} \sum_{j=1}^M \frac{x_j^{2N-1}}{\Phi_j^2} \cdot \\
&\quad \left(\left((2N+k-1)x_j^{k-1} + (2N-k-1)x_j^{-k-1} - 2(x_j^k + x_j^{-k}) \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{1}{x_j - 1/x_j} + \sum_{m=1, m \neq j}^M \left(\frac{1}{x_j - x_m} + \frac{1}{x_j - 1/x_j} \right) + \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\sum_{m=1}^{(N-M)/2} \left(\frac{1}{x_j - z_m} + \frac{1}{x_j - 1/z_j} + \kappa.c \right) \right) \right) \right) + I_k + I_k^* . \\
I_k &= \frac{2}{\lambda_N^2 U} \sum_{j=1}^{(N-M)/2} \frac{z_j^{2N-1}}{\Psi_j^2} \cdot \\
&\quad \left(\left((2N+k-1)z_j^{k-1} + (2N-k-1)z_j^{-k-1} - 2(z_j^k + z_j^{-k}) \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{1}{z_j - z_j^*} + \frac{1}{z_j - 1/z_j} + \frac{1}{z_j - 1/z_j^*} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{z_j - x_m} + \frac{1}{z_j - 1/x_m} \right) + \right) \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\sum_{m=1, m \neq j}^{(N-M)/2} \left(\frac{1}{z_j - z_m} + \frac{1}{z_j - z_m^*} + \frac{1}{z_j - 1/z_j} + \frac{1}{z_j - 1/z_j^*} \right) \right) \right) \right) . \tag{0.50}
\end{aligned}$$

Статистический интеграл определяется выражением

$$U = \frac{2}{\lambda_N} \left(\sum_{i=1}^M \frac{x_i^{N-1}}{\Phi_i} + \left(\sum_{j=1}^{(N-M)/2} \frac{z_j^{N-1}}{\Psi_j} + \kappa.c. \right) \right) .$$

При $N=1$ полином (0.46) имеет лишь два неизвестных множителя Лагранжа: λ_0 и λ_1 . По значениям АП R_0 и R_1 может быть найдена лишь одна пара вещественных корней полинома: x_1 и $1/x_1$. Эти корни и соответствующие им значения множителей Лагранжа будут вещественными и различными для моделей спектров $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$.

а) СПМ $G_1(\omega)$. Из выражений (4.19) и (4.21) следует

$$R_0 = \frac{2x_1}{\lambda_1(x_1^2 - 1)}, \quad R_1 = \frac{2x_1^2}{\lambda_1(x_1^2 - 1)} .$$

Учитывая, что корень полинома (0.46) определяется выражением

$$x_1 = \left(\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2} - \lambda_0 \right) / \lambda_1, \quad (0.51)$$

МОЖНО ПОЛУЧИТЬ

$$R_0 = 1 / \sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}, R_1 = x_1 / \sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}. \quad (0.52)$$

б) СПМ $G_2(\omega)$. Из выражений (4.20) и (4.21) следует

$$R_0 = -\frac{4(x_1^2 + 1)x_1^2}{\lambda_1^2 U(z_1^2 - 1)^3} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}, \quad (0.53)$$

$$R_1 = -\frac{8x_1^3}{\lambda_1^2 U(x_1^2 - 1)^3} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}.$$

Выражения (0.53) могут быть получены на основании выражения (0.45) с учетом, что статистический интеграл $U = 1 / \sqrt{\lambda_0^2 - \lambda_1^2}$.

в) Сравнение СПМ $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ при $N=1$. В табл. 1 приведены значения параметров спектров $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ при одинаковых АП. Как ожидалось, значения энтропии (H) СПМ $G_2(\omega)$ больше соответствующих значений энтропии Шеннона. Следовательно, процесс $G_2(\omega)$ более стохастический, чем $G_1(\omega)$, поэтому его спектральная линия шире (рис. 3).

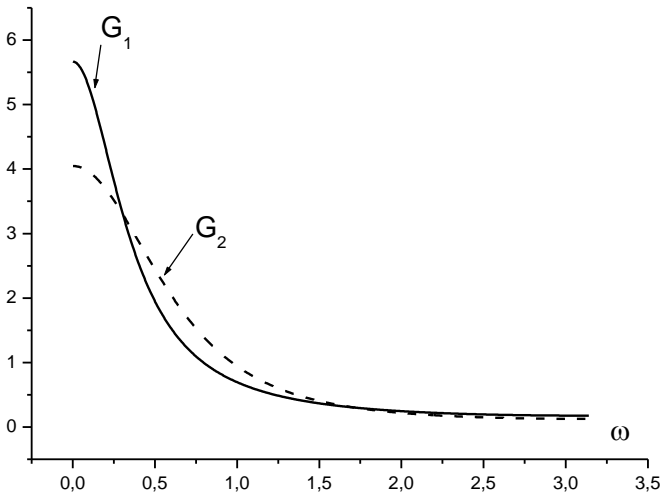


Рис.3

Таблица 1

	R_1	x_1	λ_0	λ_1	H
$G_1(\omega)$	0.7	0.7	2.92	-2.74	-0.67
	0.35	0.35	1.28	-0.8	-0.13
$G_2(\omega)$	0.7	0.41	1.96	-1.37	-0.34
	0.35	0.18	1.1	-0.4	-0.07

При $N > 2$ полюса СПМ могут находиться итерационным процессом. Одна из возможных схем такого процесса описана в [5].

4.5 Энтропия – функционал СПК, КС и СПМ

Если исследуемый процесс не является стационарным, то для описания его спектрального состава, кроме СПМ и СПК, необходимо знать комплексный спектр (КС). Информация о КС содержится во временной реализации сигнала. Эта реализация всегда ограничена. Ограниченность выборки приводит к появлению боковых лепестков в оценках КС. Для подавления этих лепестков используются всевозможные фильтры. Однако фильтрация вносит свои искажения в оценки КС. Для подавления этих искажений может быть использован метод оценки КС, основанный на принципе максимума энтропии. Выражение энтропии, используемое в традиционных методах спектрального оценивания, является функционалом СПМ, поэтому оно не может использоваться при оценке комплексных спектров. В данном случае необходимо иметь выражение энтропии случайного процесса, включающее в себя КС. Впервые такое выражение было представлено автором в монографии [5].

Для получения выражения энтропии в виде функционала СПМ в качестве модели стационарного процесса использовался ансамбль осцилляторов со случайными значениями интенсивности и частоты. Оценка КС предполагает наличие информации об амплитуде колебаний. Поэтому в качестве физической модели процесса $X(t)$, КС которого отличен от нуля, берется ансамбль осцилляторов со слу-

чайными значениями частоты и комплексной амплитуды:

$$X(t) = \sum_{k=1}^N a_k \exp(i\omega_k t). \quad (0.54)$$

Состояние ансамбля описывается одночастичной функцией плотности распределения колебаний (ФПРК) в фазовом пространстве частоты и комплексной амплитуды: $f(a, \omega)$. Определены три момента по амплитуде этой функции:

а) момент нулевого порядка, СПК –

$$\rho(\omega) = \int_{-\infty - i\infty}^{\infty} \int_{-\infty - i\infty}^{i\infty} f(a, \omega) da; \quad (0.55)$$

б) момент первого порядка, КС –

$$X(\omega) = \int_{-\infty - i\infty}^{\infty} \int_{-\infty - i\infty}^{i\infty} af(a, \omega) da; \quad (0.56)$$

в) момент второго порядка, СПМ –

$$G(\omega) = \int_{-\infty - i\infty}^{\infty} \int_{-\infty - i\infty}^{i\infty} aa^* f(a, \omega) da. \quad (0.57)$$

Энтропия процесса определяется стандартно:

$$H = - \int_0^{\pi} \int_{-\infty - i\infty}^{\infty} \int_{-\infty - i\infty}^{i\infty} f(a, \omega) \ln(f(a, \omega)) da d\omega. \quad (0.58)$$

Параметрический вид ФПРК, отвечающий максимуму энтропии при ограничивающих условиях (0.55) – (0.57), следующий:

$$f(a, \omega) = \exp(-\lambda_\rho(\omega) - \lambda_a^*(\omega)a - \lambda_a(\omega)a^* - \lambda_G(\omega)aa^*).$$

Это выражение удобно представить в другом виде:

$$f(a, \omega) = \exp(-\lambda_\rho(\omega) - \lambda_G(\omega) |a - a(\omega)|^2 + \lambda_G a(\omega) a^*(\omega)). \quad (0.59)$$

Здесь средняя комплексная амплитуд определяется выражением

$$a(\omega) = \lambda_a(\omega) / 2\lambda_G(\omega). \quad (0.60)$$

Интегрирование выражений (0.55) – (0.57) при подстановке в них функции (4.36) позволяет выразить моменты этой функции через параметры $a(\omega)$, $\lambda_\rho(\omega)$, $\lambda_G(\omega)$:

$$\rho(\omega) = \frac{\pi}{\lambda_G(\omega)} (\omega) \exp(-\lambda_\rho(\omega) + \lambda_G(\omega)a(\omega)a^*(\omega)), \quad (0.61)$$

$$X(\omega) = \rho(\omega)a(\omega), \quad G(\omega) = \rho(\omega)(\lambda_G^{-1}(\omega) + a(\omega)a^*(\omega)).$$

Производя интегрирование в (0.58) с учетом (0.55) – (0.57), получаем

$$H = -\int_0^{\pi} \rho(\omega) \ln(\lambda_G(\omega)\rho) d\omega + 1 + \ln \pi.$$

После исключения из этого выражения множителя Лагранжа $\lambda_G(\omega)$ получается выражение для энтропии в виде функционала первых трех спектральных моментов:

$$H = \int_0^{\pi} \rho(\omega) \ln \left(\frac{G\rho - XX^*}{\rho^3} \right) d\omega + 1 + \ln \pi. \quad (0.62)$$

4.6 Оценки СПК, КС и СПМ максимума энтропии

Обычно доступная информация об исследуемом процессе заключена во временной последовательности сигнала X_k и его автокорреляции R_k , поэтому в выражении ФПРК (0.59) зависят от частоты будут множители Лагранжа λ_a и λ_G , тогда как λ_ρ – постоянна.

КС представляется суммой двух квадратур:

$$X(\omega) = A(\omega) + iB(\omega).$$

Далее все выкладки будут проводиться с вещественными переменными. Для этого исходный ряд X_k разбивается на сумму четных и нечетных по знаку индекса k последовательностей: $X_k = A_k + B_k$ ($-N \leq k \leq N$, $A_k = (X_k + X_{-k})/2$, $B_k = (X_k - X_{-k})/2$). При таком разбиении связь между квадратурами и рядами значений A_k , B_k определяется выражениями

$$A_k = \int_0^{\pi} A(\omega) \cos(\omega k) d\omega, \quad B_k = \int_0^{\pi} B(\omega) \sin(\omega k) d\omega. \quad (0.63)$$

ФПРК (0.59) можно представить функцией вещественных амплитуд a и b :

$$\begin{aligned} f(a, b, \omega) &= \exp(-\lambda_\rho(0) + \lambda_G(\omega)(a(\omega) + b(\omega)) - \\ & - \lambda_G(\omega)(|a - a(\omega)|^2 + |b - b(\omega)|^2)). \end{aligned} \quad (0.64)$$

$$a(\omega) = \lambda_a(\omega) / 2\lambda_G(\omega), \quad b(\omega) = \lambda_b(\omega) / 2\lambda_G(\omega).$$

В этом выражении фигурируют полиномы $\lambda_a(\omega)$, $\lambda_b(\omega)$ и $\lambda_G(\omega)$, определяемые рядами

$$\lambda_a(\omega) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \cos(\omega k), \lambda_b(\omega) = \sum_{k=0}^K \beta_k \sin(\omega k),$$

$$\lambda_G(\omega) = \sum_{m=0}^M \gamma_m \cos(\omega m). \quad (0.65)$$

Оценки спектральных функций СПК – $\rho(\omega)$, квадратуры – $A(\omega)$ и $B(\omega)$, СПМ $G(\omega)$ полностью определяются этими полиномами:

$$\rho(\omega) = C \frac{\pi}{\lambda_G(\omega)} \exp(\lambda_G(\omega)(a^2(\omega) + b^2(\omega)),$$

$$A(\omega) = \chi \rho(\omega) a(\omega), B(\omega) = \chi \rho(\omega) b(\omega), \quad (0.66)$$

$$G(\omega) = \chi \rho(\omega) (\lambda_G^{-1}(\omega) + a^2(\omega) + b^2(\omega)).$$

Здесь $\chi \sim \mathcal{N}$, где \mathcal{N} – количество осцилляций процесса, C – множитель, нормирующий СПК на единицу. Значение χ оценивается методом наименьших квадратов, где в качестве минимизируемого функционала берется сумма

$$\Phi = \sum_{k=0}^N (A_k - \chi a_k)^2 + (B_k - \chi b_k)^2 + \sum_{m=0}^M (R_m - \chi r_m)^2. \quad (0.67)$$

Последовательности значений a_k, b_k определяются выражениями

$$a_k = \int_0^{\pi} a(\omega) \rho(\omega) \cos(\omega k) d\omega, b_k = \int_0^{\pi} b(\omega) \rho(\omega) \sin(\omega k) d\omega. \quad (0.68)$$

Значения модельной корреляционной последовательности r_m вычисляются согласно выражениям

$$r_m = \int_0^{\pi} \rho(\omega) (\lambda_G^{-1}(\omega) + a^2(\omega) + b^2(\omega)) \cos(\omega m) d\omega. \quad (0.69)$$

Неизвестными в данном случае являются $2K+M$ множителей Лагранжа полиномов (0.65) и множитель пропорциональности χ . Количество исходных значений A_k, B_k и R_m должно быть больше или равно количеству неизвестных величин. Поскольку неизвестные коэффициенты нелинейным образом фигурируют в выражениях модельных последовательностей (0.68) и (0.69), то оценка их значений может производиться только численно.

При малых отношениях сигнал/шум, при которых показатель экспоненты в выражении СПК (0.66) много меньше единицы, спектральные функции (0.66) в первом приближении могут быть представлены рациональными функциями

$$\rho(\omega) = C \frac{\pi}{\lambda_G(\omega)}, A(\omega) = \chi \frac{C\pi\lambda_a(\omega)}{2\lambda_G^2(\omega)}, B(\omega) = \chi \frac{C\pi\lambda_b(\omega)}{2\lambda_G^2(\omega)}, G(\omega) = \chi \frac{C\pi}{\lambda_G^2(\omega)}.$$

4.7 Алгоритм оценки КС максимума энтропии

Если у исследователя кроме временной последовательности X_k ($-N \leq k \leq N$) нет никакой другой информации об изучаемом процессе, то выражение ФПРК (0.64) принимает вид

$$f(a, b, \omega) = \exp(-\lambda_p + \lambda_G(a^2(\omega) + b^2(\omega)) - \lambda_G(|a - a(\omega)|^2 + |b - b(\omega)|^2)). \quad (0.70)$$

$$a(\omega) = \lambda_a(\omega) / 2\lambda_G, b(\omega) = \lambda_b(\omega) / 2\lambda_G.$$

Здесь неопределенные множители Лагранжа λ_p и λ_G от частоты не зависят, что позволяет в показателе экспоненты ФПРК перейти к безразмерным величинам, производя замену

$$a' = \sqrt{\lambda_G}a, b' = \sqrt{\lambda_G}b,$$

$$\sqrt{\lambda_G}a(\omega) = \alpha(\omega) = \sum_{k=0}^M \alpha_k \cos(\omega k), \sqrt{\lambda_G}b(\omega) = \beta(\omega) = \sum_{k=1}^M \beta_k \sin(\omega k).$$

Далее, опуская штрих у безразмерных амплитуд a и b , ФПРК (0.70) можно представить следующей функцией безразмерных величин

$$f(a, b, \omega) = C \exp\left((\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)) - (a - \alpha(\omega))^2 - (b - \beta(\omega))^2\right). \quad (0.71)$$

$$C^{-1} = \pi \int_0^{\pi} \exp(\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)) d\omega.$$

Выражения квадратур КС, соответствующие ФПРК (0.71), имеют вид

$$A(\omega) = C\alpha(\omega) \exp(\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)), \quad (0.72)$$

$$B(\omega) = C\beta(\omega) \exp(\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)).$$

Обычно, исходный временной ряд представляет размерные величины. Для унификации процесса имеет смысл привести этот ряд к стандартному виду, т.е. исключить среднее и нормировать на дисперсию. В результате значения членов симметричной по индексу последовательности A_k и антисимметричной B_k определяются как

$$A_k = (X_k + X_{-k}) / 2\sigma - \langle X \rangle / \sigma, B_k = (X_k - X_{-k}) / 2\sigma;$$

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X_k, \sigma^2 = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N (X_k - \langle X \rangle)^2. \quad (0.73)$$

Последовательности, соответствующие квадратурам (0.72), определяются стандартно посредством Фурье преобразования:

$$a_k = \int_0^\pi A(\omega) \cos(\omega k) d\omega, b_k = \int_0^\pi B(\omega) \sin(\omega k) d\omega. \quad (0.74)$$

Задача оценки КС заключается в нахождении значений коэффициентов полиномов $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$, при которых бы квадратичная невязка исходных и модельных последовательностей принимала наименьшее значение:

$$\Phi = \sum_{k=0}^N (A_k - \chi a_k)^2 + (B_k - \chi b_k)^2. \quad (0.75)$$

Таким образом, КС $X(\omega) = \chi(A(\omega) + iB(\omega))$ определяются значениями коэффициентов полиномов $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ и множителем χ . Трудность оценки значений этих коэффициентов определяется тем, что квадратуры $A(\omega)$ и $B(\omega)$ нелинейным образом зависят от них. Поэтому задача решается численно путем нахождения минимума функционала (0.75). Поиск минимума осуществляется итерационным способом.

Для итерационных процессов большое значение имеет способ выбора начальной точки. В данном случае значений искоемых коэффициентов α_k и β_k предлагается брать равными значениям A_k и B_k , умноженным на некоторый малый коэффициент ε . Значение этого коэффициента берется таким, чтобы выполнялись условия $|\alpha(\omega)| \ll 1$ и $|\beta(\omega)| \ll 1$ в интервале значений частоты $0 \leq \omega \leq \pi$. Корректно поставленная задача предполагает, что количество неизвестных коэффициентов должно быть меньше количества значений исходной последовательности, это условие выполняется при соблюдении неравенства $M < N$. Для удобства последовательность коэффициентов α_k и β_k далее представляется вектором \mathbf{V} , компоненты которого определены следующим образом: $V_k = \alpha_{k-1}$ ($1 \leq k \leq M+1$), $V_{k+M+1} = \beta_k$ ($1 \leq k \leq M$). Итерационная процедура начинается с определения начальных значений компонент вектора \mathbf{V} согласно выражениям

$$V_1 = \varepsilon A_0, \dots, V_{M+1} = \varepsilon A_M, \quad V_{M+2} = \varepsilon B_1, \dots, V_{2M+1} = \varepsilon B_M.$$

Затем согласно (0.72) вычисляются квадратуры $A(\omega)$ и $B(\omega)$, а по ним вычисляются значения последовательностей a_k и b_k . Коэффициент χ , минимизирующий функционал Φ , определяется следующим выражением

$$\chi = \frac{A_0 a_0 + \sum_{k=1}^N (A_k a_k + B_k b_k)}{a_0^2 + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2)}. \quad (0.76)$$

Значение функционала Φ вычисляется согласно выражению

$$\Phi = A_0^2 + \sum_{k=1}^N (A_k^2 + B_k^2) - \chi^2 \left(a_0^2 + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right). \quad (0.77)$$

Затем методом покоординатного спуска находятся значения коэффициентов α_k и β_k , при которых функционал (0.77) принимает минимальное значение. Однако найденное решение нельзя считать окончательным, поскольку оно обладает невысокой информативностью.

Следуя Кульбаку [18], оценку количественной меры информации, приходящейся на одно колебание, предлагается производить на основе выражения

$$I_{ku} = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(a, b, \omega) \text{Ln} \left(\frac{f(a, b, \omega)}{\mathfrak{f}(a, b, \omega)} \right) dadbd\omega. \quad (0.78)$$

Где $\mathfrak{f}(a, b, \omega)$ – альтернативная ФПРК, соответствующая белому гауссову шуму и определяемая выражением

$$\mathfrak{f}(a, b, \omega) = \frac{1}{2\pi^2 \mathfrak{E}^2} \exp \left(-\frac{a^2 + b^2}{2\mathfrak{E}^2} \right). \quad (0.79)$$

Здесь дисперсия альтернативной ФПРК определяется средним значением суммы квадрата амплитуд a и b

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^2 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (a^2 + b^2) f(a, b, \omega) dadbd\omega = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{C\pi}{2} \int_0^\pi (\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)) \exp(\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)) d\omega. \end{aligned} \quad (0.80)$$

Учитывая (0.71), после интегрирования (0.78), имеем

$$I_{ku} = \ln(2C\pi^2 \mathfrak{E}^2) + 2\mathfrak{E}^2 - 1. \quad (0.81)$$

Как легко убедиться, при $|\alpha(\omega)| \ll 1$ и $|\beta(\omega)| \ll 1$ значение информации Кульбака близко к нулю.

Повышение информативности спектральной оценки производится следующим образом. Вектор \mathbf{V} , компоненты которого были вычислены на предыдущем итерационном шаге, умножается на некоторый коэффициент $\gamma > 1$, и процедура поиска минимума невязки повторяется. Значение γ выбирается таким, чтобы соответствующее новому \mathbf{V} значение невязки несущественно отличалось от предыдущего минимального значения. Процесс повторяется многократно до тех пор пока не прекратится рост значения I_k . Опыт показывает, что для большинства сигналов в начале итерационного процесса имеет значение I_k близкое 0. Затем это значение возрастает до 5-7. У очень «хороших» сигналов с низким уровнем шума эта величина может достичь 12-15. Таким образом, I_k является интегральным параметром сигнала, характеризующим как сам сигнал, так и качество оценки его спектра.

4.8 Прогнозирование солнечной активности на основ КС максимума энтропии

Спектральное оценивание, реализованное на конечных рядах данных, может быть использовано для экстраполяции этих рядов. Однако успехи в области прогноза на основе спектрального оценивания часто не оправдывали ожиданий. Причин тому несколько. Например, ДПФ в принципе не может быть использовано для прогноза, поскольку оно предполагает периодичность исследуемого ряда за пределами окна наблюдения. Непрерывные спектральные модели страдают противоположными изъянами: пролонгированные за пределы окна наблюдения ряды или обращаются в ноль, или убывают по закону $\sin(x)/x$. Дискретные модели спектра, представленные во второй главе, не обоснованно оптимистичны – они предполагают, что обнаруженные в сигнале гармонические колебания могут быть продолжены за пределы окна наблюдения на любое расстояние, вплоть до бесконечности.

Казалось бы, более всего для решения прогностических задач подходят АР спектральные модели. Но как уже указывалось, эти модели соответствуют процессам с равномерным распределением частоты спектральных компонент. Более того, в основе этих моделей заложен поиск коэффициентов линейного предсказания вперед и назад. Следовательно, для решения задачи прогноза нет необходи-

мости восстанавливать спектр, поскольку можно экстраполировать сигнал за пределы окна, непосредственно используя эти коэффициенты. Алгоритм оценки КС, описанный в предыдущем разделе по многим показателям может быть использован для экстраполяции рядов данных. Во-первых, он основан на определении энтропии, соответствующем более стохастическим процессам, чем в АР моделях. Во-вторых, алгоритм нелинейный, что расширяет его возможности. В-третьих, появляется возможность оценивать количество информации, содержащейся в спектральных оценках.

Возможности алгоритма были проверены автором на решении задачи прогноза численности солнечных пятен в 1999. Было предсказано, что длительность 23 цикла (от минимума до минимума) будет около 14 лет.

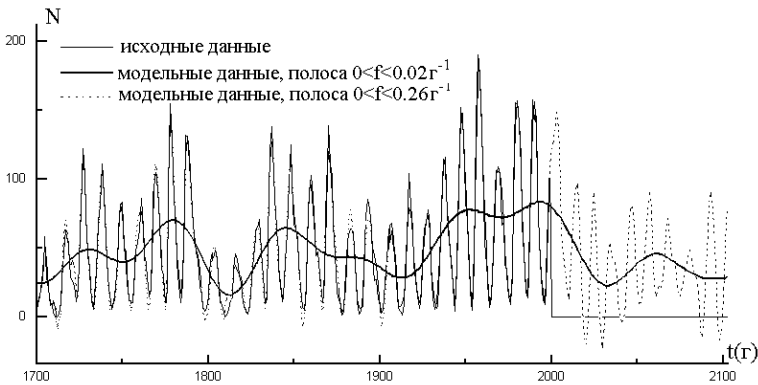


Рис. 4

На рис. 4 представлены среднегодовые значения чисел солнечных пятен, начиная с 1700 г. по 1998 г. и результаты аппроксимации и пролонгации этих значений при двух полосах частот. Как следует из рисунка, интенсивность следующего 24 цикла ожидается ниже 23-го. К сожалению, эти результаты не были опубликованы.

В 2003 г. расчеты были повторены, доложены и опубликованы в трудах конференции [19]. В сообщении указывалось, что эпоха очередного минимума активности Солнца будет приходиться на середину 2008 г., тогда как согласно прогнозу NASA от 16 мая 2003 г. этот минимум должен наблюдаться во второй половине 2006 г.

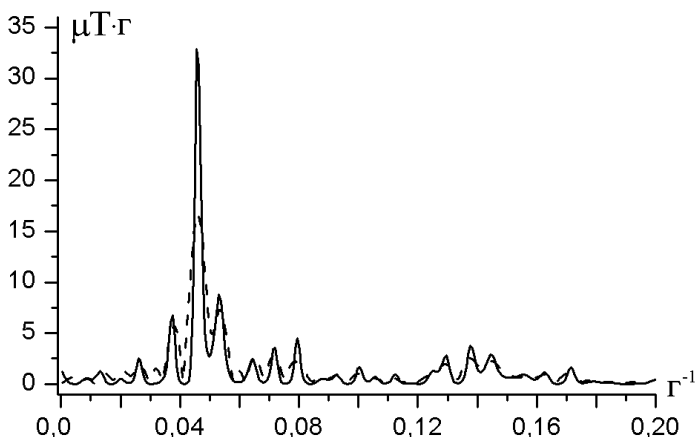


Рис. 5 Амплитудный спектр максимума энтропии чисел Вольфа, полученный для различных значений информации Кульбака.

На рис. 5 приведен участок амплитудного спектра в полосе частот $[0, 0.2 \text{ г}^{-1}]$. Для расчета спектра использовались ряды данных с сайта <http://sidc.oma.be/sunspot-dat/daylyssn.php> за период с 1849 по май 2009 г. Однодневные данные усреднялись по интервалу в 27 дней. В результате для расчетов спектра использовался ряд из 2503 отсчетов с периодом дискретизации 27 дней. При этом данные для четного цикла брались со знаком плюс, а для нечетного со знаком минус. Оценка спектра производилась согласно алгоритму, представленному в разделе 4.7. В начале итеративного процесса комплексный спектр максимума энтропии был близок к спектру ДПФ, при этом значение информации Кульбака было малым: $I_{ku}=10^{-4}$. Соответствующий этому случаю участок амплитудного спектра представлен на рисунке штриховой линией. В процессе счета значения информации Кульбака было увеличено до 1.25 (амплитудный спектр изображен на рис. 5 сплошной линией). С ростом информации Кульбака увеличивается амплитуда спектральных линий и уменьшается ширина линий. Часть линий, присутствующая в спектре с малым значением информации Кульбака, исчезает. Кроме того, у ряда линий смещается положение максимума.

Литература:

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х томах. Под ред. А. П. Юшкевича. Т.3. М.: Наука. 1972. 497с.
2. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир. 1990. 584 с.
3. Робинсон Э.А. История развития спектрального оценивания//ТИИЭР. –1982. –Т 70. –№ 9. –С. 6-33.
4. Сарычев В. Т.. Метод максимальной энтропии в спектральном оценивании//Изв. Вузов. Радиофизика. –1991. –№ 2. – С. 157-162.
5. Сарычев В. Т. Спектральное оценивание методами максимальной энтропии. Томск. Издательство ТГУ. 1994. – 256 с.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. –М.: «Советское радио». –1974. –550с.
7. Сарычев В.Т. Спектральные оценки вариаций межпланетного магнитного поля//Геомagnetизм и Аэрономия. –2003. –Т. 43. – №4. –С. 453-460.
8. Кей С.М. и Марпл-мл С.Л. Современные методы спектрального анализа: Обзор//ТИИЭР. –1981. – № 11. –С. 5-51.
9. Сарычев В.Т. Дискретное ангармоническое преобразование Фурье// Изв. вузов, Радиоэлектроника. –1981. –№ 8. –С.102-104.
10. Сарычев В.Т. Спектральное оценивание и энтропия// Изв.вузов. Физика. –1993. –№ 10. С.117-127.
11. Хинчин А.Я. Теория корреляции стационарных случайных процессов//УМН. – 1938. – № 5. – С. 42-51.
12. Яглом А.М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью//Труды Моск. матем. Об.-ва. – 1955. – Т. 4. – С. 95-125.
13. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. – М.: ИЛ, 1963. 830 с.
14. Засухин В.Н. К теории многомерных стационарных случайных процессов//ДАН СССР. – 1941. – Т.33. – С. 435-437.
15. Джейнс Э.Т. О логическом обосновании метода максимальной энтропии//ТИИЭР. – 1982. – № 9. – С. 33-51.
16. Больцман Л. Лекции по теории газов. М.: из-во Технико-теоретической литературы, 1953. –554 с.

17. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физ. мат. лит. 1963. – 431с.
18. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. – 408 с.
19. Сарычев В.Т. "Спектральный анализ численности солнечных пятен и их прогноз".// "Актуальные проблемы физики солнечной и звёздной активности", конференция стран СНГ и Прибалтики. Сб. докл. в 2-х томах. Н-Новгород. 2003. т.2. С.477-480.
- 20 Кошелев В.И., Коньков П.А., Сарычев В.Т., С.Э. Шипилов "Параметрическая идентификация сверхширокополосных сигналов на фоне шумов"// Изв. Вузов. Физика. –2008. – №6. – С.46-53.

Отпечатано на радиофизическом факультете
Томского государственного университета.

Подписано к печати 7.05.2009 г. Объем 43 с. Тираж 100 экз.
г. Томск, ул. Лыткина, 28-г, корпус ТГУ №11.